ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.95

Асадова О. [1]

Мамедова Н. [2]

Аббасова А. [3]

[1, 2, 3] доцент кафедры уравнений математической физики

Бакинский государственный университет
Азербайджан, г. Баку

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛОВ К РЕШЕНИЮ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Настоящая работа посвящена исследованию граничной задачи для полигармонического уравнения шестого порядка, зависящего от комплексного параметра. Доказано, что при определённых значениях параметра из определенного сектора в λ -плоскости существует достаточно гладкое решение рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: *полигармоническое уравнение, упругость, гидродинамика, спектральная задача, теория потенциалов*.

Как известно, теория краевых задач для полигармонических уравнений и систем является актуальной. Кроме того, она имеет большое теоретическое и практическое значение в теории упругости и гидродинамики. Существует довольно много работ, посвящённых исследованию таких задач [1; 2; 3].

Одним из мощных методов решения смешанных задач для параболических уравнений и систем [4] является метод контурного интеграла Расулова М.Л. [6; 7], по схеме которого поставленной смешанной задаче сопоставляется граничная задача с комплексным параметром, называемая

© Асадова О., Мамедова Н., Аббасова А., 2017

спектральной задачей. В обосновании этого метода основные трудности встречаются при изучении спектральной задачи. Поэтому настоящая работа посвящена исследованию одной краевой задачи для полигармонического уравнения шестого порядка, а именно рассматривается задача нахождения решения уравнения

$$\sum_{k=0}^{3} A_3(x)\lambda^{2k}\Delta^{3-k}u(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} B_{ij}(x)\lambda^{2j}\Delta^{2-j}\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u=F(x,\lambda),\ x=(x_1,x_2,x_3),\quad (1)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to z\in\Gamma} u(x,\lambda)=\varphi_0(z),\ \lim_{x\to z\in\Gamma}\frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial n_z}=\varphi_1(z),\\ \lim_{x\to z\in\Gamma}\frac{d}{dn_z}\Delta^2 u(x,\lambda)=\varphi_2(z),\end{aligned}\right\},\quad (2)$$

где Γ – граница области D, Δ_x – оператор Лапласа, n_z – направление внутренней нормали к границе Γ в точке $z\in\Gamma$. Не нарушая общности, можно сказать, что $A_3(x)\equiv 1$, при всех $x\in D$.

Предполагается выполнение условий:

1⁰. Корни характеристического уравнения

$$\nu^3-A_2(x)\nu^2+A_1(x)\nu-A_0(x)=0 \quad (3)$$

имеют отрицательные действительные части, аргументы ν-корней и их разностей не зависят от x. Следовательно, уравнение (1) параболическое в смысле Петровского И.Г. [5].

2⁰. Коэффициенты $A_k(x)$ $(k=\overline{0,2})$ уравнения (1) имеют непрерывные производные до $3-2k$-го $(k=0,1)$ порядка включительно, $A_2(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция при всех $x=(x_1,x_2,x_3)\in D$, кроме того, $A_0(z)\neq 0$ при $z\in\Gamma$, $B_{i,j}(x)(i=1,2,3;\ j=0,1,2)$ и $C(x)$ – достаточно гладкие функции при всех $x\in D$,

3⁰. Граница Γ области D является поверхностью Ляпунова с числом α и принадлежащем классу Λ_2, где $0<\alpha<1$.

4⁰. Правая часть $F(x,\lambda)$ уравнения (1) – непрерывно-дифференцируемая функция по $x=(x_1,x_2,x_3)$ в области D и аналитична по λ в области R_δ, где $R_\delta=\left\{\lambda:|\lambda|>R,\ |\arg\lambda|\le\frac{\pi}{4}+\delta\right\}$, причем $\delta>0$ – достаточно малое число

5⁰. Граничные функции $\varphi_m(z)$ $(m=0,1,2)$ непрерывные при всех $z\in\Gamma$.

Задачу (1), (2) разобьём на две задачи:

Задачей *A* назовём задачу нахождения уравнения (1), удовлетворяющего нулевым граничным условиям, решение которой обозначим через $u_A(x,\lambda)$.

Задачей *B* назовём задачу нахождения решения однородного уравнения (1'), соответствующего уравнению (1), удовлетворяющего граничным условиям (2), решение которой обозначим через $u_B(x,\lambda)$.

В связи с тем, что решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющего нулевым граничным условиям, строится с помощью функции Грина, в настоящей работе будем исследовать задачу (1'), (2) для однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), т. е. для уравнения

$$\sum_{k=0}^{3} A_k(x)\lambda^{2k}\Delta^{3-k}u(x,\lambda)+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{2} B_{ij}(x)\lambda^{2j}\Delta^{2-j}\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u=0 \quad (1')$$

с граничными условиями (2).

По схеме метода потенциалов решение задачи (1'), (2) будем искать в виде суммы специальных потенциалов

$$u(x,\lambda)=\sum_{s=1}^{3}W_s(x,\lambda)\ , \tag{4}$$

где $W_s(x,\lambda),(s=\overline{1,3})$ – потенциалы, определяемые с помощью фундаментального решения

$$\mathrm{P}(x,\xi,\lambda)=\mathrm{P}(x-\xi,\xi,\lambda)+\iiint_D \mathrm{P}_0(x-\eta,\eta,\lambda)h(\eta,\xi,\lambda)d_\eta D\,, \tag{5}$$

причём $\mathrm{P}_0(x-\xi,\xi,\lambda)$ – фундаментальное решение главной части уравнения (1'), замороженного в точке $x=\xi$,

$$A_0(\xi)\Delta^3u+\lambda^2A_1(\xi)\Delta^2u+\lambda^4A_2(\xi)\Delta u+\lambda^6u=0\ , \tag{6}$$

определяемое формулой

$$\mathrm{P}_0(x-\xi,\xi,\lambda)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{ij}(\xi)}{(m_i-1-j)!\lambda^{4+2(m_i-j)}}\left\{\frac{d}{d\nu^{m_i}}\frac{\exp\left(-\frac{\lambda|x-\xi|}{\sqrt{-\nu(\xi)}}\right)}{4\pi|x-\xi|\nu(\xi)}\right\}_{\nu=\nu_i(\xi)},$$

причём

$$a_{ij}(\xi)=\frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{d\nu^{j-1}}\frac{(\nu-\nu_i(\xi))^m}{\Delta(1,\nu)}\nu^2\right\}_{\nu=\nu_i(\xi)},$$

наконец, характеристический определитель определяется в виде

$$\Delta(1,\nu)=\nu^3+A_2(\xi)\nu^2+A_1(\xi)\nu-A_0(\xi)\,, \tag{6'}$$

нулями которого являются $\nu_i(\xi)\ (i=1,2,3)$.

Наконец, плотность $h(x,\xi,\lambda)$ интегрального довеска в правой части (5) является решением интегрального уравнения

$$h(x,\xi,\lambda)=\mathrm{K}(x,\xi,\lambda)+\iiint_D \mathrm{K}(x,\eta,\lambda)h(\eta,\xi,\lambda)d_\eta D\ , \tag{7}$$

которое является фредгольмовым, так как для ядра $\mathrm{K}(x,\xi,\lambda)$ справедлива оценка

$$|\mathrm{K}(x,\xi,\lambda)|\le\frac{C\exp\left[-\varepsilon|\lambda||x-\xi|\right]}{|x-\xi|^2}$$

при всех $\lambda\in R_\delta$. Следовательно, интегральное уравнение (7) – регулярное, и его можно решить методом последовательных приближений.

Далее, так как решение спектральной задачи (6), (2) определяется в виде суммы потенциалов, помимо фундаментального решения требуется построить ещё одно частное решение уравнения (6), которое обозначим $\mathrm{P}_0^*(x-\xi,\xi,\lambda)$. Непосредственной проверкой доказывается, что это решение может быть выбрано следующим образом:

$$\mathrm{P}_0^*(x-\xi,\xi,\lambda)=-\frac{1}{4\pi\lambda^4|x-\xi|}\left\{\frac{\nu_1^2(\xi)\exp\left(-\frac{\lambda|x-\xi|}{\sqrt{-\nu_1(\xi)}}\right)}{(\nu_1(\xi)-\nu_2(\xi))(\nu_1(\xi)-\nu_3(\xi))}+\frac{\nu_2^2(\xi)\exp\left(-\frac{\lambda|x-\xi|}{\sqrt{-\nu_2(\xi)}}\right)}{(\nu_2(\xi)-\nu_1(\xi))(\nu_2(\xi)-\nu_3(\xi))}+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu_3^2(\xi)\exp\left(-\frac{\lambda|x-\xi|}{\sqrt{-\nu_3(\xi)}}\right)}{(\nu_3(\xi)-\nu_1(\xi))(\nu_3(\xi)-\nu_2(\xi))}\right\}$$

Аналогично тому, как это сделано в [8] и [9], пользуясь построенным фундаментальным и частными решениями $\mathrm{P}_0(x-\xi,\xi,\lambda)$ и $\mathrm{P}_0^*(x-\xi,\xi,\lambda)$, строим потенциалы $W_s(x,\lambda)\,(s=\overline{1,3})$ в виде

$$W_1(x,\lambda)=\iint\limits_{\Gamma}\frac{d\mathrm{P}_1(x,y,\lambda)}{dn_y}\mu_1(y,\lambda)d\Gamma_y,$$

$$W_2(x,\lambda)=\iint\limits_{\Gamma}\frac{d\mathrm{P}_2(x,y,\lambda)}{dn_y}\mu_2(y,\lambda)d\Gamma_y,$$

$$W_3(x,\lambda)=\iint\limits_{\Gamma}\mathrm{P}_3(x,y,\lambda)\mu_3(y,\lambda)d\Gamma_y,$$

где $\mathrm{P}_s(x,y,\lambda)\ (s=\overline{1,3})$ – частные решения уравнения (1), определяемые следующим образом:

$$\mathrm{P}_1(x,y,\lambda)=\mathrm{P}_3(x,y,\lambda)+\frac{8A_0(y)}{15\lambda^4}\frac{d^4\mathrm{P}(x,y,\lambda)}{dn_y^4}-\frac{4A_0(y)}{3\lambda^4}\frac{d^2\Delta_y\mathrm{P}(x,y,\lambda)}{dn_y^2},$$

$$\mathrm{P}_2(x,y,\lambda)=-\lambda^{-2}\Delta_y\mathrm{P}(x,y,\lambda),$$

$$\mathrm{P}_3(x,y,\lambda)=\mathrm{P}_0^*(x-y,y,\lambda)+\iiint\limits_{D}\mathrm{P}_0(x-\eta,\eta,\lambda)h_1(\eta,y,\lambda)d_\eta D,$$

где $\mathrm{P}(x,y,\lambda)$ – фундаментальное решение уравнения (1'), которое представляется в виде (5), $\mathrm{P}_0(x-\xi,\xi,\lambda)$ – фундаментальное, а $\mathrm{P}_s^*(x,y,\lambda)\ (s=\overline{1,3})$ – частные решения уравнения (6).

Аналогично тому, как это сделано в [7], доказываются соответствующие формулы скачка, с помощью которых решение поставленной задачи (1'), (2), (3) ищется в виде суммы потенциалов

$$u(x,\lambda)=W_1(x,\lambda)+W_2(x,\lambda)+W_3(x,\lambda)\ , \qquad (13)$$

для которых доказываются соответствующие формулы скачка (см. [8], [9]). Далее, с помощью доказанных формул скачка, решение спектральной задачи (1'), (2) сводится к решению системы регулярных интегральных уравнений. Наконец, доказывается, что для решения поставленной задачи имеет место оценки

$$\left|\frac{\partial^k u(x,\lambda)}{\partial x_i^k}\right|\le\frac{C_1\exp\left[-\varepsilon|\lambda|d(x)\right]}{|\lambda|^{4-k}d^{6-k}(x)},\ (k=\overline{0,4}),$$

$$\left|\frac{\partial^k u(x,\lambda)}{\partial x_i^k}\right|\le\frac{C\exp\left[-\varepsilon|\lambda|d(x)\right]}{d^{k-2}(x)},\ (k=5,6)$$

при всех $\lambda\in R_\delta, c=const$, где $d(x)$ – наименьшее расстояние от точки $x\in D$ до границы Γ области D.

Аналогично решаются остальные граничные задачи для данного уравнения с помощью удачно построенных потенциалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Oseen C.W. Nevere methoden und Ergebnisse in der Hedrodinamik. – III Leipzig, 1927.
3. Панич О.И. О потенциалах полигармонического уравнения четвертого порядка // Мат. сборник. – 1960. – № 3. – Т.50 (92).
4.Эйдельман С.Т. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 442 с.
5. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Гостехиздат, 1953. – 2-е изд. – 360 с.
6. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. – М.: Наука, 1964. – 462 с.

7. Расулов М.Л. Применение метода контурного интеграла. – М.: Наука, 1975. – С. 255.
8. Асадова О.Г. О потенциалах полигармонического уравнения 6-го порядка // Сиб. мат. сборник; Деп. ВИНИТИ, 1988. – С. 24.
9. Асадова О.Г. Оценка решений спектральных задач, соответствующих задачам для параболического уравнения порядка больше двух // Дифференциальные уравнения. – 1974. Т. X. – С. 1839–1848.

Asadova O. [1]

Mammadova N. [2]

Abbasova A. [3]

[1, 2, 3] Associate Professor, Department of Mathematical Physics Equations

Baku State University
Azerbaijan, Baku

APPLICATION OF THE THEORY OF POTENTIAL TO THE SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEM FOR THE SIXTH ORDER POLYHARMONIC EQUATION

The present work is devoted to a research of a boundary problem for the sixth order polyharmonic equation of depending on complex parameter. It is proved that at certain values of parameter from a certain sector in λ -planes a rather smooth solution of the considered problem exists.

Keywords: *the polyharmonic equation, elasticity, hydrodynamics, spectral problem, theory of potentials.*