УДК 539.3

Мовсумова А.Х.
научный сотрудник

Институт математики и механики
Национальная академия наук Азербайджана
Республика Азербайджан, г. Баку

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА ПОПЕРЕЧНОГО КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ВЯЗКО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В работе рассматривается задача о поперечном колебании неоднородной цилиндрической оболочки кругового поперечного сечения, лежащей на линейном вязко-упругом основании. Предполагается, что модуль упругости и плотность являются непрерывными функциями координаты толщины.

Для случаев, когда торцевые поверхности оболочки свободно поддерживаются, при определенных формах неоднородности, проведен численный анализ. Результаты расчетов представлены в виде таблицы и графика зависимостей между безразмерной величиной частоты и параметром неоднородности.

Ключевые слова: *оболочка, неоднородность, сечения, упругость, вязкость, основание, модуль, прогиб.*

Как известно, в инженерной практике широко используются цилиндрические оболочки кругового поперечного сечения, лежащие на вязко упругих средах [1; 4].

В связи тем, что в ряде случаев механические свойства и плотность являются неоднородными по толщине, появляется необходимость решения задач устойчивости и колебания оболочек с учетом вышеуказанных специфических свойств.

Отметим, что учет неоднородности и сопротивления среды осложняет решения задач, а их неучет может привести к существенным погрешностям.

Предполагается, что цилиндрическая оболочка, изготовленная из непрерывно неоднородного материала, лежит на вязкоупругом основании сопротивления среды (q) – с прогибом W(x,y,z) и связана следующим соотношением [3]:

$$q = (k_1 + k_2 \frac{\partial^2}{\partial_t^2}) w(x,t) \qquad (1)$$

Здесь k_1 и k_2 – характеристики основания, определяются экспериментальным путем, t – время.

Координатная система выбрана следующим образом. Ось x – направлена вдоль образующей, ось x_2 – вдоль дуги, ось z – нормально к серединной поверхности оболочки.

Модули упругости и плотность являются переменными, а коэффициенты Пуассона являются постоянными.

$$\rho = \rho_0 \psi(z); \quad E_2 = E_2^0 f(z); \quad G = G^0 f(z); \quad \nu_i = const, \quad \nu_2 = const. \tag{2}$$

Здесь E_1^0, E_2^0, G^0 и ρ^0 – соответствуют однородному ортотропному случаю.

Уравнение движения в данном случае записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{T_2}{R} + K_1 W + (K_2 + \overline{\rho})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

Здесь

$$T_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 dz; \quad M_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 z\, dz; \quad \overline{\rho} = \rho_0 h \int_{-h/2}^{+h/2} \psi(z)\, dz$$

Сюда должна добавить краевые условия.

Можно установить, что T_1 и T_2 через компоненты вектора выражаются следующими соотношениями:

$$T_1 = \frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\left\{A_1\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \nu_1 \frac{W}{R}\right) - A_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right\};$$

$$M_1 = \frac{E_2^0}{1-\nu_1\nu_2}\left\{A_2\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x}\right) - A_3\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right\}; \tag{4}$$

$$A_3 = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 f(z) dz$$

Принимая, что $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Rightarrow 0$, из (4) при $\frac{\partial T_1}{\partial x} = 0$ получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{A_1\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \nu_1 \frac{W}{R}\right) - A_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right\} = 0$$

Отсюда находим

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} - A_1 \nu_1 \frac{W}{R} - A_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

Или же

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A_1 \nu_1 \frac{W}{R} + A_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{5}$$

Подставляя (5) выражения момента M_1, получим

$$M_1 = \frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\left\{A_2\left[\left(A_1\nu_1\frac{W}{R}+A_2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)-\nu_1\frac{W}{R}\right]-A_3\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right\}$$

Или же

$$M_1 = \frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\left[\left(A_2^2-A_3\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+A_2\nu_1\left(A_1-1\right)\frac{W}{R}\right] \quad (6)$$

Подставляя выражения T_1 и M_1 в уравнения (3), получим:

$$\frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(A_2^2-A_1\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+A_2\nu_1\left(A_1-1\right)\frac{W}{R}\right]+\frac{1}{R}\left[A_2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\left(A_1^2\nu_1-A_1\nu_1\right)\frac{W}{R}\right)\right]\right\}$$

$$+K_1W+\left(K_2+\overline{\rho}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0$$

Или же

$$\frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\left(A_2^2-A_1\right)\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\frac{A_2\nu_1}{R}\left(A_1-1\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{A_2}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{1}{R}\left(A_1^2\nu_1-A_1\nu_1\right)\frac{W}{R}++K_1W+\left(K_2+\overline{\rho}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \quad (7)$$

Краевые условия имеют следующий вид:

$$T_1=0;\quad W=0;\quad M_1=0$$

Вводя обозначения:

$$C_1=\frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\left(A_2^2-A_1\right),\quad C_2=\frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\frac{A_2}{R}\left(\left(A_1-1\right)\nu_1\right),$$
$$C_3=\frac{E_1^0}{1-\nu_1\nu_2}\frac{A_1^2\nu_1-A_1\nu_1}{R^2}+K_1 \quad (8)$$

Уравнение движения можно представить в следующем виде:

$$C_1\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+C_2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\left(C_3+K_1\right)\cdot W+\left(K_2+\overline{\rho}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \quad (9)$$

Решение (9) будем искать в следующем виде (предполагается гармоническое поперечное колебание оболочки):

$$W=W_0\sin\frac{m\pi}{l}x\cdot e^{i\omega t} \quad (10)$$

Здесь m – число полувалы по длине оболочки, l – длина, ω – частота.
Подставляя (10) в (9), получим:

$$C_1\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4-C_2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+C_3-\omega^2\left(\overline{K_2}+\overline{\rho}\right)=0 \quad (11)$$

Для нахождения значения ω^2 используем условия экстремума относительно $\lambda_m = \left(\dfrac{m\pi}{l}\right)$

$$4c_1\lambda_m^3 - Lc_1\lambda_m = 0$$

Или же

$$\lambda_m^2 = \frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1} \qquad (12)$$

Подставляя значение (12) в (11), получим

$$C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2} - C_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c_2}{c_1} + C_3 - \omega^2\left(\overline{K_2} + \overline{\rho}\right) = 0\,.$$

$$-C_3\frac{1}{4} \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2} - \omega^2\left(\overline{K_2} + \overline{\rho}\right) = 0\,.$$

Отсюда находим:

$$\omega^2 = \frac{c_3 - 0{,}25\, c_2^2 \cdot c_1^{-1}}{\overline{K_2} + \overline{\rho}} \qquad (13)$$

Если оболочка лежит на основании Винклера, из (13) получим:

$$\omega^2 = \frac{c_3 - 0{,}25\, c_2^2 \cdot c_1^{-1}}{\overline{\rho}} \qquad (14)$$

Тогда из (13) и (14) получим следующую связь между ω^2 и ω_v^2.

$$\left(\frac{\omega}{\omega_v^2}\right)^2 = \frac{1}{K_2 \cdot \overline{\rho^{-1}} + 1} = \frac{1}{\mu + 1}; \qquad \mu = K_2 \cdot \overline{\rho^{-1}} \qquad (15)$$

Результаты расчета представим в виде таблицы 1 и рисунка 1.

Задавая значения μ (это означает K_2 и $\overline{\rho} = \int\limits_{-1/2}^{+1/2} \psi(z)dz$ известно), находим $\overline{\omega^2}$:

Таблица 1

μ	$(\omega x)^2$
0	1
0,25	0,8
0,5	0,667
0,75	0,571
1	0,5

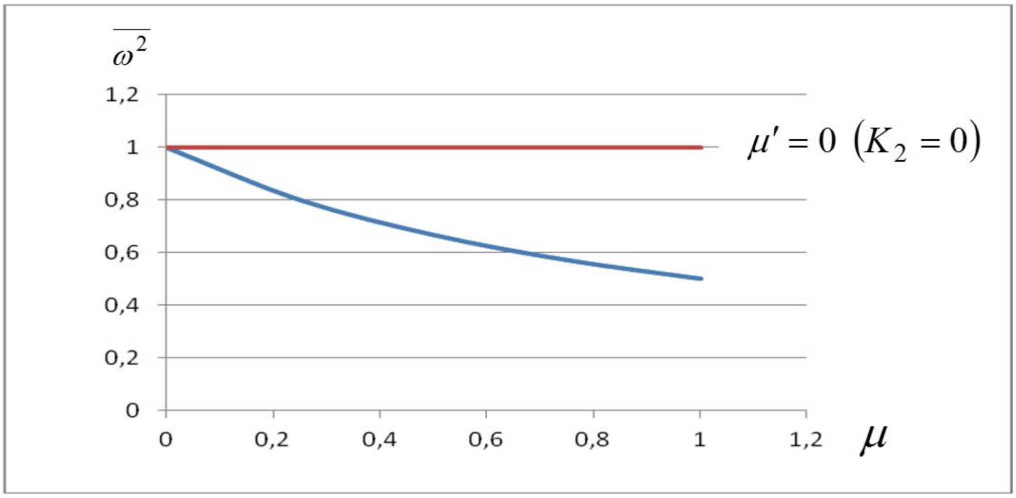

Рис. 1. График зависимости безразмерной величины частоты от неоднородности плотности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – С. 368 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория анизотропных пластин. – 1977. – С. 445.
3. Carnet H., Lievvy. Free vibrations of rein for call elastic shells // Journal of Applied Mechanics. – 1969. – Vol. 36. – P. 835–844.
4. Баженов В.А. Изгиб цилиндрической оболочек в упругой среде. – Львов, 1975. – 168 с.
5. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Теория оболочек и пластин. – М.: Изд-во МГУ. – 1969. – 693 с.
6. Sofiyev A.H., Schack E., Haciyev V.C., Kurdoglu N. Effect the two parameter elastic foundations on the critical parameters of non-homogeneous orthotropic shells // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2012. – Vol. 12, № 5б. –24 p.

Movsumova A.H.
research associate

Institute of Mathematics and Mechanics
NAN of Azerbaijan
Azerbaijan, Baku

AXIALLY-SYMMETRIC FORM OF LATERAL VIBRATION OF A NON-HOMOGENOUS CYLINDRICAL SHELL LYING ON VISCOUS-ELASTIC FOUNDATION

The paper deals when lateral vibration of a non-homogeneous cylindrical shell of circular section and lying on a linear viscous-elastic foundation. It is assumed that the modulus of elasticity and density are continuous functions of the thickness coordinate.

For the case when the end faces of the shell are freely supported, under specific forms of non-homogeneity we carry out numerical analysis. The results of calculations are represented in the form of tables and graphs of dependence between the dimensionless frequency quantity and non-homogeneity parameter.

Key words: *shell, non-homogeneity, section, elasticity, viscosity, foundation, modulus, deflection.*