УДК 519.86

Садыгов И.М.
научный сотрудник

Институт Экономики НАНА
Азербайджан, г. Баку

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

В работе изучаются невыпуклые модели экономической динамики. Рассмотрена модель Гейла. Получены необходимые условия оптимальности траектории. Получены теоремы об ограниченности цен, которые являются основным инструментом в рассматриваемой теории, и рассмотрены характеристики вектора Куна-Таккера.

Ключевые слова: *модель Гейла, необходимое условие, вектор Куна-Таккера, выпуклое множество.*

1. Введение

Рассмотрим модель, которая была предложена Гейлом (см. например, [2; [3]). Введем основные определения. В модели для каждого момента времени $t = 1,2,\ldots$ считается заданным множество Q_t (технологическое множество), элементами которого являются пары неотрицательных m(t-1) и m(t)-мерных векторов (x,y) (технологические процессы: x-затраты, y-выпуск). На Q_t определена функция $F_t(x,y)$ $(t = 1,2,\ldots)$ (целевая функция или функция полезности), где $Q_t \subset R^{m(t-1)} \times R^{m(t)}$. При этом неотрицательные $m(t-1)$-мерные векторы $x = (x^1,\ldots,x^{m(t-1)})$ трактуются как наборы общественных благ (или продуктов): x^i-количество i-го продукта в наборе x. Включение $(x,y) \in Q_t$ означает, что, затратив в момент времени $t-1$ набор x, в момент t можем произвести набор $y \in R^{m(t)}$.

Последовательность технологических процессов $\{z_t\} = \{(x_{t-1}, y_t)\}$ (t пробегает некоторый интервал натурального ряда) называется планом, если $z_t \in Q_t$, $y_t \geq x_t$, $t = 1,2,\ldots,n$. Первое условие выражает технологическую осуществимость z_t, второе – ограничение на ресурсы: затраты не превосходят предшествующего выпуска. Вектор $\tilde{y}_0$ $(\tilde{x}_n)$ называется начальным (финальным) вектором для плана $\{(x_0,y_1),(x_1,y_2),\ldots,(x_{n-1},y_n)\}$, если $\tilde{y}_0 \geq x_0$ $(y_n \geq \tilde{x}_n)$, где $\tilde{y}_0 \in R^{m(0)}$ $(\tilde{x}_n \in R^{m(n)})$.

© Садыгов И.М., 2018

Задача оптимального планирования на конечном интервале времени ставится следующим образом. Фиксируем натуральное n и векторы $\widetilde{y}_0 \geq 0$ и $\widetilde{x}_n \geq 0$. Среди всех планов $\{(x_0, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_{n-1}, y_n)\}$ с начальным вектором $\widetilde{y}_0$ и финальным вектором $\widetilde{x}_n$ требуется найти тот, для которого сумма $F_1(x_0, y_1) + F_2(x_1, y_2) + \ldots + F_n(x_{n-1}, y_n)$ принимает наименьшее значение. Такой план называется оптимальным.

Пусть в общем случае $m(t-1)$ отлично от $m(t)$ при $t = 1, \ldots, n$, т.е. число потребляемых и выпускаемых товаров в общем случае неравны и $Q_t \subset R^{m(t-1)} \times R^{m(t)}$, $t = 1,2,\ldots,n$, компактные множества, а F_t – полунепрерывная снизу функция. Тогда легко проверяется, что множество планов – компактное множество, а $f(\xi) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n)$ – полунепрерывная снизу функция, где $\xi = (z_1, \ldots, z_n)$. Поэтому, если существует хотя бы один план с начальным вектором $\widetilde{y}_0$ и финальным вектором $\widetilde{x}_n$, то это гарантирует существование оптимальных планов.

Пусть X – банахово пространство, функция $h : X \to R$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0. Рассмотрим производную по направлению Кларка (см. [1, с. 194])

$$h^0(x_0; x) = \overline{\lim_{z \to x_0, \lambda \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda}(h(z + \lambda x) - h(z)) \ .$$

Положим $\partial_C h(x_0) = \{p \in X^* : h^0(x_0; x) \geq \langle p, x \rangle \ \text{при} \ x \in X\}$ (см. [1, с. 196]).

Если $C \subset X$ и $d_C(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$, то положим (см. [1, с. 212])

$$T_C(x_0) = \{x \in X : d_C^0(x_0 : x) = 0\}, \quad N_C(x_0) = \{p \in X^* : \langle p, x \rangle \leq 0 \ \text{при} \ x \in T_C(x_0)\}.$$

2. Необходимое условие оптимальности

Положим $k = m(0) + 2m(1) + \cdots + 2m(n-1) + m(n)$,

$$Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n \subset R^k, \quad \xi = (z_1, \ldots, z_n) \in R^k, \quad z_t = (x_{t-1}, y_t) \in R^{m(t-1)} \times R^{m(t)},$$

$$f(\xi) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n), \quad g(\xi) = (x_0 - \widetilde{y}_0, x_1 - y_1, \ldots, x_{n-1} - y_{n-1}, \widetilde{x}_n - y_n).$$

Отметим, что $x_t, y_t \in R^{m(t)}$.

Рассмотрим задачу минимизацию функции

$$f(\xi) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n)$$

при следующих ограничениях

$$g(\xi) = (x_0 - \widetilde{y}_0, x_1 - y_1, \ldots, x_{n-1} - y_{n-1}, \widetilde{x}_n - y_n) \leq 0, \qquad (1)$$
$$\xi \in Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n,$$

где неравенство $g(\xi) \leq 0$ понимается как покоординатное.

Обозначим $p_t = (p_t^1, \ldots, p_t^{m(t)})$, где $t = 0,1,2,\ldots,n$, $s = m(0) + m(1) + \cdots + m(n-1) + m(n)$.

Теорема 1. Пусть функции $F_t(z_t)$ удовлетворяют условию Липшица в окрестности точки $\overline{z}_t$ с постоянной K_t, $\overline{\xi} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$ является оптимальным планом задачи (1). Тогда существуют $(x_{t-1}^*, y_t^*) \in \partial F_t(\overline{z}_t)$, $(\overline{x}_{t-1}^*, \overline{y}_t^*) \in N_{Q_t}(\overline{z}_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$, число $r_0 = 0$ или $r_0 = 1$ и вектор $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq 0$, $p \in R^s$, где $\langle p, g(\cdot) \rangle(\overline{\xi}) = 0$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$r_0((x_0^*, y_1^*), (x_1^*, y_2^*), \ldots, (x_{n-1}^*, y_n^*)) + ((p_0, -p_1), (p_1, -p_2), \ldots, (p_{n-2}, -p_{n-1}), (p_{n-1}, -p_n)) +$$
$$+ ((\overline{x}_0^*, \overline{y}_1^*), (\overline{x}_1^*, \overline{y}_2^*), \ldots, (\overline{x}_{n-1}^*, \overline{y}_n^*)) = 0.$$

где $\partial F_t(\overline{z}_t)$ – субдифференциал Кларка к функции F_t в точке $\overline{z}_t$, $N_{Q_t}(\overline{z}_t)$ – нормальный конус Кларка к множеству Q_t в точке $\overline{z}_t$.

Доказательство. По теореме 10.47 [1, с. 221] существуют число $r_0 = 0$ или $r_0 = 1$ и вектор $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq 0$, $p \in R^s$, где $\langle p, g(\cdot)\rangle(\bar{\xi}) = 0$, одновременно не равные нулю, такие, что $0 \in \partial(r_0 f(\cdot) + \langle p, g(\cdot)\rangle)(\bar{\xi}) + N_Q(\bar{\xi})$.

Ясно, что

$$\partial f(\bar{\xi}) = \partial(F_1(\cdot) + F_2(\cdot) + \ldots + F_n(\cdot))(\bar{\xi}) \subset (\partial F_1(\bar{z}_1), \partial F_2(\bar{z}_2), \ldots, \partial F_n(\bar{z}_n)) =$$
$$= \{((x_0^*, y_1^*), (x_1^*, y_2^*), \ldots, (x_{n-1}^*, y_n^*)) : (x_{t-1}^*, y_t^*) \in \partial F_t(\bar{z}_t),\ t = 1,2,\ldots,n\}.$$

Так как

$$\langle p, g(\cdot)\rangle(\xi) = \langle p_0, x_0 - \tilde{y}_0\rangle + \langle p_1, x_1 - y_1\rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, x_{n-1} - y_{n-1}\rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n - y_n\rangle,$$

где $p_0 = (p_0^1, \ldots, p_0^{m(0)})$, $p_1 = (p_1^1, \ldots, p_1^{m(1)}), \ldots, p_n = (p_n^1, \ldots, p_n^{m(n)})$, то

$$\partial\langle p, g(\cdot)\rangle(\xi) = ((p_0^1, \ldots, p_0^{m(0)}), (-p_1^1, \ldots, -p_1^{m(1)}), (p_1^1, \ldots, p_1^{m(1)}), \ldots, (-p_{n-1}^1, \ldots, -p_{n-1}^{m(n-1)}),$$
$$(p_{n-1}^1, \ldots, p_{n-1}^{m(n-1)}), (-p_n^1, \ldots, -p_n^{m(n)})) = (p_0, -p_1, p_1, -p_2, \ldots, p_{n-2}, -p_{n-1}, p_{n-1}, -p_n).$$

Поэтому

$$0 \in \partial(r_0 f(\cdot) + \langle p, g(\cdot)\rangle)(\bar{\xi}) + N_Q(\bar{\xi}) \subset$$
$$\subset r_0\{((x_0^*, y_1^*), (x_1^*, y_2^*), \ldots, (x_{n-1}^*, y_n^*)) : (x_{t-1}^*, y_t^*) \in \partial F_t(\bar{z}_t), t = 1,2,\ldots,n\} +$$
$$+ ((p_0, -p_1), (p_1, -p_2), \ldots, (p_{n-2}, -p_{n-1}), (p_{n-1}, -p_n)) +$$
$$+ (N_{Q_1}(\bar{x}_0, \bar{y}_1) \times N_{Q_2}(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \times \cdots \times N_{Q_n}(\bar{x}_{n-1}, \bar{y}_n)).$$

Тогда существуют $(x_{t-1}^*, y_t^*) \in \partial F_t(\bar{z}_t)$, $(\bar{x}_{t-1}^*, \bar{y}_t^*) \in Q_t(\bar{z}_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$, такие, что

$$r_0((x_0^*, y_1^*), (x_1^*, y_2^*), \ldots, (x_{n-1}^*, y_n^*)) + ((p_0, -p_1), (p_1, -p_2), \ldots, (p_{n-2}, -p_{n-1}), (p_{n-1}, -p_n)) +$$
$$+ ((\bar{x}_0^*, \bar{y}_1^*), (\bar{x}_1^*, \bar{y}_2^*), \ldots, (\bar{x}_{n-1}^*, \bar{y}_n^*)) = 0.$$

Теорема доказана.

Отсюда вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Пусть функции $F_t(z_t)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\bar{z}_t$ с постоянной K_t, $\bar{\xi} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ является оптимальным планом задачи (1). Тогда существуют $(x_{t-1}^*, y_t^*) \in \partial F_t(\bar{z}_t)$, $(\bar{x}_{t-1}^*, \bar{y}_t^*) \in N_{Q_t}(\bar{z}_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$, число $r_0 = 0$ или $r_0 = 1$ и вектор $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq 0$, где $\langle p, g(\cdot)\rangle(\bar{\xi}) = 0$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$r_0(x_0^*, y_1^*) + (p_0, -p_1) + (\bar{x}_0^*, \bar{y}_1^*) = 0,$$
$$r_0(x_1^*, y_2^*) + (p_1, -p_2) + (\bar{x}_1^*, \bar{y}_2^*) = 0, \qquad (2)$$
$$r_0(x_{n-1}^*, y_n^*) + (p_{n-1}, -p_n) + (\bar{x}_{n-1}^*, \bar{y}_n^*) = 0.$$

Из соотношений (2) имеем, что $r_0(x_{t-1}^*, y_t^*) + (p_{t-1}, -p_t) + (\bar{x}_{t-1}^*, \bar{y}_t^*) = 0$ при $t = 1,2,\ldots,n$. Поэтому $-r_0(x_{t-1}^*, y_t^*) - (p_{t-1}, -p_t) \in N_{Q_t}(\bar{z}_t)$ или $(-p_{t-1}, p_t) \in N_{Q_t}(\bar{z}_t) + r_0(x_{t-1}^*, y_t^*)$.

Отметим, что из

$$\langle p, g(\cdot)\rangle(\bar{\xi}) = \langle p_0, \bar{x}_0 - \tilde{y}_0\rangle + \langle p_1, \bar{x}_1 - \bar{y}_1\rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, \bar{x}_{n-1} - \bar{y}_{n-1}\rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n - \bar{y}_n\rangle = 0$$

следует, что $\langle p_0, \bar{x}_0 - \tilde{y}_0\rangle = 0$, $\langle p_1, \bar{x}_1 - \bar{y}_1\rangle = 0, \cdots, \langle p_{n-1}, \bar{x}_{n-1} - \bar{y}_{n-1}\rangle = 0$, $\langle p_n, \tilde{x}_n - \bar{y}_n\rangle = 0$ или

$$p_0^1(\bar{x}_0^1 - \tilde{y}_0^1) = 0, \ldots, p_0^{m(0)}(\bar{x}_0^{m(0)} - \tilde{y}_0^{m(0)}) = 0, \quad p_1^1(\bar{x}_1^1 - \bar{y}_1^1) = 0, \ldots, p_1^{m(1)}(\bar{x}_1^{m(1)} - \bar{y}_1^{m(1)}) = 0, \ldots,$$
$$p_{n-1}^1(\bar{x}_{n-1}^1 - \bar{y}_{n-1}^1) = 0, \ldots, p_{n-1}^{m(n-1)}(\bar{x}_{n-1}^{m(n-1)} - \bar{y}_{n-1}^{m(n-1)}) = 0, \quad p_n^1(\tilde{x}_n^1 - \bar{y}_n^1) = 0, \ldots, p_n^{m(n)}(\tilde{x}_n^{m(n)} - \bar{y}_n^{m(n)}) = 0.$$

Рассмотрим бесконечные оптимальное планы. Бесконечный план $\bar{\xi} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, \ldots)$ с начальным вектором $\tilde{y}_0$ называется оптимальным, если для любого плана

$\xi = (z_1,\ldots,z_n,\ldots)$ с тем же начальным вектором найдется число n_0, такое, что для всех $n \ge n_0$ и $\widetilde{\xi} = (z_1,\ldots,z_n)$, где $y_n \ge \overline{x}_n$, выполняется неравенство

$$F_1(\overline{x}_0,\overline{y}_1)+F_2(\overline{x}_1,\overline{y}_2)+\ldots+F_n(\overline{x}_{n-1},\overline{y}_n) \le F_1(x_0,y_1)+F_2(x_1,y_2)+\ldots+F_n(x_{n-1},y_n).$$

Тогда из теоремы 1 имеем следующее следствие.

Следствие 2. Пусть функция $F_t(z_t)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\overline{z}_t$ с постоянной K_t, $\overline{\xi} = (\overline{z}_1,\ldots,\overline{z}_n,\ldots)$ является оптимальным планом задачи (1). Тогда для любого $n \ge n_0$ существуют $(x^*_{t-1},y^*_t) \in \partial F_t(\overline{z}_t)$, $(\overline{x}^*_{t-1},\overline{y}^*_t) \in N_{Q_t}(\overline{z}_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$, число $r_0 = 0$ или $r_0 = 1$ и вектор $p = (p_0, p_1, p_2,\ldots,p_n) \ge 0$ где $\langle p, g(\cdot)\rangle(\overline{\xi}_n) = 0$, $\overline{\xi}_n = (\overline{z}_1,\ldots,\overline{z}_n)$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$r_0((x^*_0,y^*_1),(x^*_1,y^*_2),\ldots,(x^*_{n-1},y^*_n))+((p_0,-p_1),(p_1,-p_2),\ldots,(p_{n-2},-p_{n-1}),(p_{n-1},-p_n))+$$
$$+((\overline{x}^*_0,\overline{y}^*_1),(\overline{x}^*_1,\overline{y}^*_2),\ldots,(\overline{x}^*_{n-1},\overline{y}^*_n)) = 0.$$

3. Стимулирующие цены (конечный интервал планирования)

Центральную роль в дальнейшем будет играть понятие стимулирующих цен (см. [3, с. 51]). Системой цен или просто ценами будем называть любую последовательность неотрицательных $m(t)$-мерных векторов $\{p_t\}$, где $p_t = (p^1_t,\ldots,p^{m(t)}_t)$, $t = 0,1,2,\ldots,n$.

Фиксируем натуральное n, векторы $\widetilde{y}_0 \ge 0$ и $\widetilde{x}_n \ge 0$, где $\widetilde{y}_0 \in R^{m(0)}$, $\widetilde{x}_n \in R^{m(n)}$. Пусть $\{(x_0,y_1),(x_1,y_2),\ldots,(x_{n-1},y_n)\}$ – план с начальным вектором $\widetilde{y}_0$ и финальным вектором $\widetilde{x}_n$, $p_0,p_1,\ldots,p_n$ цены. Обозначим $G_t(z) = F_t(z) + \langle p_{t-1},x\rangle - \langle p_t,y\rangle$, где $z = (x,y) \in Q_t$. Скажем, что цены $\{p_0,p_1,\ldots,p_n\}$ стимулируют план $\{(x_0,y_1),(x_1,y_2),\ldots,(x_{n-1},y_n)\}$ или $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$, если выполнены следующие условия:

$$1)\ \min_{z\in Q_t} G_t(z) = G_t(z_t),\ t = 1,\ldots,n, \qquad 2)\ \langle p_t, y_t - x_t\rangle = 0,\ t = 0,1,\ldots,n,$$

где $z_t = (x_{t-1},y_t) \in Q_t$, $y_0 = \widetilde{y}_0$, $x_n = \widetilde{x}_n$. Из 1) имеем, что

$$G_t(z) = F_t(z) + \langle p_{t-1},x\rangle - \langle p_t,y\rangle \ge G_t(z_t) = F_t(z_t) + \langle p_{t-1},x_{t-1}\rangle - \langle p_t,y_t\rangle$$

при $z = (x,y) \in Q_t$. Отсюда получим, что

$$F_t(z) - F_t(z_t) \ge \langle -p_{t-1},x - x_{t-1}\rangle + \langle p_t,y - y_t\rangle \qquad (3)$$

при $z = (x,y) \in Q_t$. По условию $Q_t \subset R^{m(t-1)} \times R^{m(t)}$. Пусть Q_t выпуклое множество, $F_t : Q_t \to R$ выпуклая функция. Тогда из (3) имеем, что $(-p_{t-1},p_t)$ является судифференциалом функции F_t в точке $z_t = (x_{t-1},y_t) \in Q_t$ относительно множества Q_t (см. [5, с. 102]). Если $z_t = (x_{t-1},y_t) \in \operatorname{int} Q_t$, то из следствия 1 теоремы 2.1 [4, с. 30] получим, что в некоторой окрестности точки $z_t = (x_{t-1},y_t)$ функция F_t удовлетворяет условию Липшица с постоянной K_t. Поэтому $\partial F_t(z_t) = \partial F_t(x_{t-1},y_t) \subset K_t S$, где $S \subset R^{m(t-1)} \times R^{m(t)}$ – единичный шар (см. теорему 4.2 [4, с. 67]). Если $z_t = (x_{t-1},y_t) \in \operatorname{int} Q_t$, то из соотношения $F_t(z) - F_t(z_t) \ge \langle -p_{t-1},x - x_{t-1}\rangle + \langle p_t,y - y_t\rangle$ при $z = (x,y) \in Q_t$ имеем, что $(-p_{t-1},p_t) \in \partial F_t(z_t)$.

Отсюда следуют справедливость следующих следствий.

Следствие 3. Если Q_t – выпуклое множество, $F_t : Q_t \to R$ – выпуклая функция, $z_t = (x_{t-1},y_t) \in \operatorname{int} Q_t$, то цены $\{p_0,p_1,\ldots,p_n\}$, которые стимулируют план $(z_1,\ldots,z_n)$, ограничены.

Следствие 4. Если Q_t – выпуклое множество, $F_t : Q_t \to R$ – выпуклая функция, $z_t = (x_{t-1}, y_t) \in \operatorname{int} Q_t$, функция F_t удовлетворяет условию Липшица с постоянной K_t в окрестности точки $z_t = (x_{t-1}, y_t)$ и $\sup\limits_t K_t < +\infty$, то семейство цен $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, которые стимулируют план $(z_1, \ldots, z_n)$ для любого натурального n, равномерно ограничено.

Рассмотрим задачу минимизацию функции

$$f(\xi) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n)$$

при следующих ограничениях

$$g(\xi) = (x_0 - \tilde{y}_0, x_1 - y_1, \ldots, x_{n-1} - y_{n-1}, \tilde{x}_n - y_n) \le 0, \quad \xi \in Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n.$$

Пусть множество Q_t выпукло, функции $F_t(z_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$, выпуклые, существует вектор $\tilde{\xi} \in Q$, такой, что $g(\tilde{\xi}) < 0$. Если $\bar{\xi} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ является оптимальным планом задачи (1), то по теореме 4.3.9 [5, с. 160] Куна-Таккера существует вектор $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$, где $p_t = (p_t^1, \ldots, p_t^{m(t)})$, $p_t \ge 0$, такой, что

$$\begin{aligned} &\min_{\xi \in Q} (f(\xi) + \langle p_0, x_0 - \tilde{y}_0 \rangle + \langle p_1, x_1 - y_1 \rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, x_{n-1} - y_{n-1} \rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n - y_n \rangle) = \\ &= f(\bar{\xi}) + \langle p_0, \bar{x}_0 - \tilde{y}_0 \rangle + \langle p_1, \bar{x}_1 - \bar{y}_1 \rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, \bar{x}_{n-1} - \bar{y}_{n-1} \rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n - \bar{y}_n \rangle = f(\bar{\xi}). \end{aligned} \tag{4}$$

Так как $\langle p_t, \bar{x}_t - \bar{y}_t \rangle \le 0$, то из равенства

$$f(\bar{\xi}) + \langle p_0, \bar{x}_0 - \tilde{y}_0 \rangle + \langle p_1, \bar{x}_1 - \bar{y}_1 \rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, \bar{x}_{n-1} - \bar{y}_{n-1} \rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n - \bar{y}_n \rangle = f(\bar{\xi}),$$

следует, что $\langle p_t, \bar{x}_t - \bar{y}_t \rangle = 0$ при $t = 1,2,\ldots,n-1$, $\langle p_0, \bar{x}_0 - \tilde{y}_0 \rangle = 0$ и $\langle p_n, \tilde{x}_n - \bar{y}_n \rangle = 0$.

Из (4) имеем, что

$$\begin{aligned} &F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n) + \langle p_0, x_0 - \tilde{y}_0 \rangle + \langle p_1, x_1 - y_1 \rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, x_{n-1} - y_{n-1} \rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n - y_n \rangle \ge \\ &\ge F_1(\bar{z}_1) + F_2(\bar{z}_2) + \ldots + F_n(\bar{z}_n) + \langle p_0, \bar{x}_0 - \tilde{y}_0 \rangle + \langle p_1, \bar{x}_1 - \bar{y}_1 \rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, \bar{x}_{n-1} - \bar{y}_{n-1} \rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n - \bar{y}_n \rangle \end{aligned}$$

при $z_t = (x_{t-1}, y_t) \in Q_t$, $t = 1,\ldots,n$. Ясно, что

$$\begin{aligned} &F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n) + \langle p_0, x_0 - \tilde{y}_0 \rangle + \langle p_1, x_1 - y_1 \rangle + \cdots + \langle p_{n-1}, x_{n-1} - y_{n-1} \rangle + \\ &+ \langle p_n, \tilde{x}_n - y_n \rangle = \sum_{t=1}^{n} G_t(z_t) - \langle p_0, \tilde{y}_0 \rangle + \langle p_n, \tilde{x}_n \rangle, \end{aligned}$$

где G_t – приведенная полезность, соответствующая ценам $\{p_t\}$. Поэтому

$$\sum_{t=1}^{n} G_t(z_t) \ge \sum_{t=1}^{n} G_t(\bar{z}_t),$$

т.е. $\min\limits_{(z_1,\ldots,z_n) \in Q_1 \times \cdots \times Q_n} \sum\limits_{t=1}^{n} G_t(z_t) = \sum\limits_{i=1}^{n} G_t(\bar{z}_t)$. Отсюда получим, что $\min\limits_{z_t \in Q_t} G_t(z_t) = G_t(\bar{z}_t)$ при $t = 1,2,\ldots,n$. Поэтому семейство цены $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ стимулируют план $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть множество Q_t выпукло, функции $F_t(z_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$, выпуклые, найдется вектор $\tilde{\xi} \in Q$, такой, что $g(\tilde{\xi}) < 0$ и $\bar{\xi} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ является оптимальным планом задачи (1). Тогда существуют цены $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, которые стимулируют план $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, при $y_0 = \tilde{y}_0$, $x_n = \tilde{x}_n$.

Метод возмущений. Отметим, что векторы Куна-Таккера $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ являются решением двойственной задачи. Рассмотрим другую характеристику вектора Куна-Таккера $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$.

Рассмотрим семейство задач вида

$$f(\xi) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n) \to \min,$$
$$g(\xi) = (x_0 - \tilde{y}_0,\ x_1 - y_1, \ldots,\ x_{n-1} - y_{n-1},\ \tilde{x}_n - y_n) \le b, \qquad (5)$$
$$\xi \in Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n,$$

где $b \in R^s$ векторный параметр.

Введем следующие обозначения:

$$X(b) = \{\xi \in Q : g(\xi) \le b\}$$

допустимое множество задачи (5),

$$B = \{b \in R^s : X(b) \ne \varnothing\},$$

множество параметров b, при которых задача (5) имеет допустимые точки,

$$F(b) = \inf\{f(\xi) : \xi \in X(b)\} \text{ при } b \in B, \text{ значение задачи (5)},$$
$$P(b) = \{p \in R^s_+ : F(b) \le f(\xi) + \langle p, g(\xi) - b\rangle \text{ при всех } \xi \in Q\}$$

множество векторов Куна-Таккера этой задачи.

Рассмотрим субдифференциал функции $F(b)$ относительно множества B в точке $\bar{b} \in B$: $\partial F(\bar{b}) = \{q \in R^s : F(b) - F(\bar{b}) \ge \langle q, b - \bar{b}\rangle \text{ при всех } b \in B\}$.

Теорема 3. Если Q_t – выпуклое множество, $F_t : Q_t \to R$ – выпуклая функция, $F_t(z_t) \ge 0$ при $z_t \in Q_t$ и существует вектор $\tilde{\xi} \in Q$, такой, что $g(\tilde{\xi}) < 0$, то

1) множество B выпукло,

2) функция $F(b)$ конечна, выпукла и не возрастает на B,

3) $\partial F(\bar{b}) = -P(\bar{b})$ при всех $\bar{b} \in \operatorname{int} B$.

Доказательство. По условию множество Q_t выпукло, функции $F_t(z_t)$, $t = 1,2,\ldots,n$, выпуклые, существует вектор $\tilde{\xi} \in Q$, такой, что $g(\tilde{\xi}) < 0$. Поэтому $f(\xi) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \ldots + F_n(z_n)$ выпуклая функция, и из п.1) теоремы 4.3.2 [5, с. 153] следует, что вектор Куна-Таккера задачи (5) существует, т.е. $P(0) \ne \varnothing$. По условию $0 \in B$ и $F_t(z_t) \ge 0$ при $z_t \in Q_t$. Поэтому $F(0) = \inf\limits_{\xi \in X(0)} f(\xi) \ge 0$, т.е. значение исходной задачи (5) конечно. Получим, что условия теоремы 4.3.14 [5, с. 164] выполняются. Тогда справедливость теоремы следует из теоремы 4.3.14 [5, с. 164]. Теорема доказана.

Утверждение 3) теоремы 3 дает следующую характеристику вектора Куна-Таккера задачи (5): векторы Куна-Таккера задачи (5) суть взятые с обратным знаком субградиенты значения этой задачи как функция правых частей ограничений.

Вектору Куна-Таккера можно придать различные экономические интерпретации в зависимости от вида исходной задачи и ее трактовки (см. [5, с. 167]). Во первых, вектор Куна-Таккера задачи (5) предстанет как вектор оценок дефицитности ресурсов, во вторых, он совпадает с вектором цен, действующих в системе.

Следствие 5. Если Q_t – выпуклое множество, $F_t : Q_t \to R$ – выпуклая функция, $F_t(z_t) \ge 0$ при $z_t \in Q_t$ и существует вектор $\tilde{\xi} \in \operatorname{int} Q$, такой, что $g(\tilde{\xi}) < 0$, то $0 \in \operatorname{int} B$ и

1) функция F непрерывна в точке $b = 0$,

2) функция $F(b)$ имеет производную $F'(0;h)$ по любому направлению $h \in R^s$ в точке $b = 0$, причем $F'(0;h) = \max\limits_{q \in P(b)} \langle -q, h\rangle$,

3) F дифференцируема в точке $b = 0$ в том и только том случае, если вектор Куна-Таккера задачи (1) единствен, т.е. $P(0) = \{q\}$, при этом $F'(0) = -q$.

Доказательство. Так как существует вектор $\widetilde{\xi} \in \operatorname{int} Q$, такой, что $g(\widetilde{\xi}) < 0$, то имеем, что $0 \in \operatorname{int} B$. Тогда получим, что $F(b) = \inf\limits_{\xi \in X(b)} f(\xi)$ – конечная неотрицательная функция в окрестности точки 0. По условию $B \subset R^s$. Поэтому функция $F(b)$ непрерывна в точке $b = 0$. Тогда из теоремы 3.4.2 [5, с. 104] получим, что $F'(0;h) = \max\limits_{q \in \partial F(0)} \langle q, h \rangle = \max\limits_{q \in P(b)} \langle -q, h \rangle$.

Справедливость утверждения 3) следствия 5 следует из теоремы 3.4.3 [5, с. 05].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. – London: Springer-Verlag, 2013. – 591 p.

2. Гейль Д. Математическая теория оптимального экономического развития // Математика. – 1970. – № 6 (14). – С. 165–170.

3. Левин В.Л. (редактор) Методы теории экстремальных задач в экономике. – М.: Наука, 1981. – 192 с.

4. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. – М.: Мир, 1988. – 264 с.

5. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

Sadigov I.M.
researcher

Azerbaijan National Academy of Sciences, Institute of Economy
Azerbaijan, Baku

ON THE NON-STATIONARY OPTIMIZATION MODEL ECONOMIC DYNAMICS

The paper studies non-convex models of economic dynamics. The Gale model is considered. The necessary optimality conditions for an trajectory are obtained. Theorem on the boundaries of prices is obtained, which is the main instrument of the considered theory and the characteristics of the Kuhn-Tucker vector are considered.

Key words: *Gale model, necessary condition, Kuhn-Tucker vector, convex set.*