УДК 62-571.1

Дракунов А.Ю.
младший научный сотрудник проекта

Дракунов Ю.М.
руководитель проекта, доктор технических наук

Институт механики и машиноведения
Казахстан, г. Алматы

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЕРЕДАТОЧНОГО МЕХАНИЗМА ТИПА ВССП *

В работе рассмотрен общий метод синтеза простых пространственных рычажных механизмов с выходным звеном в виде ползуна. Предложен точный интерполяционный синтез по полному числу параметров и приближенный квадратичный метод для множества заданных положений механизма. Задача решается с помощью векторного и матричного исчисления. Рассмотрено решение конкретных прикладных задач. Весь процесс синтеза автоматизирован с помощью СКА Maple.

Ключевые слова: *механизм, синтез, кинематический анализ, система уравнений, сборки механизма, корни полино-ма, кривошип, угол давления, матрица, вектор, искомые параметры.*

Под кинематическим синтезом понимается проектирование кинематической схемы механизма по заданным условиям, характеризующим его кинематические свойства. Поскольку в данном случае уравнения, описывающие кинематические зависимости в механизме, решаются относительно постоянных параметров кинематической схемы, а переменные параметры механизма (перемещения, скорости и ускорения) приобретают «статус» заданных величин, то кинематический синтез можно интерпретировать как задачу, обратную кинематическому анализу.

При синтезе передаточных рычажных механизмов решается задача о приближении функции перемещения, воспроизводимой проектируемым механизмом, к заданной функции на заданном отрезке. Известны различные методы аналитического синтеза, основанные на математической теории приближения функций. В литературе по теории механизмов описаны, в частности, следующие методы [1]: интерполирование, квадратическое приближение, наилучшее приближение (или приближение по Чебышеву).

В математическом отношении наиболее простым является метод интерполирования, наиболее сложным – метод наилучшего приближения. По этой причине многие задачи синтеза удалось решить аналитически только при помощи метода интерполирования. Что касается методов квадратического приближения и наилучшего приближения, то их не удаётся реализовать в аналитической форме и в «чистом» виде (то есть без упрощающих допущений) даже для простейших задач синтеза из-за возникающих математических трудностей.

© Дракунов А.Ю., Дракунов Ю.М., 2019

* *Работа выполнена при поддержке гранта РК № AP05134959.*

К механизмам, выполняющим указанные выше функции, предъявляется общее требование: они должны иметь как можно меньше звеньев и обобщенных координат. Это требование, в свою очередь, приводит к задаче приближенного воспроизведения заданного движения механизмами с низшими парами, причем предпочтение отдается одноподвижным механизмам, у которых множество положений любого звена инвариантны к закону изменения обобщенной координаты механизма. Речь идет о реализации периодически повторяющейся программы движения объекта.

Программа движения, подлежащая реализации посредством механизмов, задается либо непрерывно – функциями, либо дискретно – совокупностью конечноудаленных положений (конечных перемещений).

Все существующие методы кинематического синтеза пространственных механизмов с низшими парами можно разделить на две группы по способу составления уравнений синтеза. В первую группу входят методы, исходящие непосредственно из уравнений взаимосвязи относительных перемещений звеньев (функций положения) проектируемого механизма. Эти методы принято называть алгебраическими. Ко второй группе относятся методы, основывающиеся на уравнениях связей, которые налагаются на движение выходного звена (перемещаемого тела) незамкнутыми кинематическими цепями. Эти методы принято называть методами геометрических ограничений или же просто геометрическими методами синтеза.

Первым из методов приближения в синтезе пространственных механизмов было использовано интерполирование, лежащее в основе интерполяционного синтеза механизмов, т.е. синтеза по условию точного воспроизведения положений (перемещений), скоростей и ускорений звеньев механизма. При интерполяционном синтезе в качестве уравнений синтеза используются неявные функции положения плоских и пространственных механизмов. Эти функции преобразуются к уравнениям, в левой части которых стоят алгебраические многочлены от новых переменных, зависящих от постоянных параметров проектируемых кинематических схем. Число этих уравнений не может превышать количество постоянных параметров кинематической схемы механизма [1; 2].

При интерполяционном синтезе узлы интерполяции могут быть приняты за искомые параметры, и при удачном выборе их эта задача может быть сведена к квадратичному, чебышевскому или наилучшему приближению.

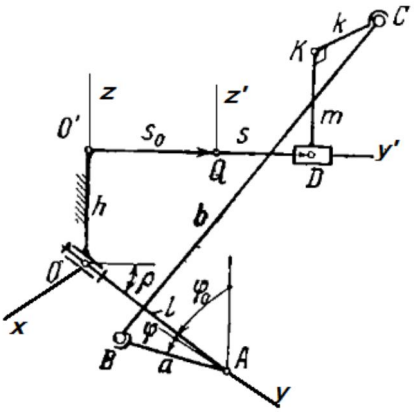

Рис. 1. Механизм типа ВССП

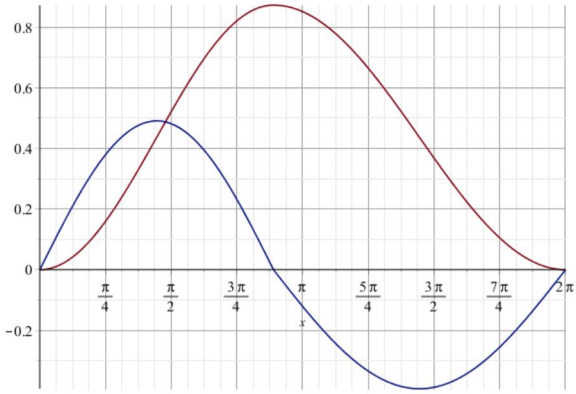

Рис. 2. Вид тестовой функции

Запишем выражение для квадрата длины шатуна BC в векторной форме:

$$b^2 = (\vec{r}_C - \vec{r}_B)^2 . \qquad (1)$$

Здесь радиусы векторы точек B и C равны соответственно

$$\begin{aligned}&\vec{r}_B = a\sin(\varphi_i+\varphi_0)\cdot\vec{i} + l\cdot\vec{j} + a\cos(\varphi_i+\varphi_0)\cdot\vec{k},\\&\vec{r}_C = -[(\mathrm{s}_i+\mathrm{s}_0)\sin\rho + k\cos\rho]\cdot\vec{i} + [(\mathrm{s}_i+\mathrm{s}_0)\cos\rho + k\sin\rho]\cdot\vec{j} + d\cdot\vec{k}\end{aligned} \quad (2)$$

В формуле (2) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты прямоугольной системы координат $Oxyz$. Для упрощения выводов здесь принято $d = h + m$. Подставим (2) в выражение (1) и раскроем скобки. После некоторых преобразований получим для любого i-го положения механизма $i = 1,2,\ldots,N$. N – число заданных положений входного AB и выходного CD звеньев механизма.

$$\Delta q_i = P_0 + P_1\cos\varphi_i + P_2\sin\varphi_i + P_3 s_i + P_4 s_i^2 + P_5\cos\varphi_i\cdot s_i + P_6\cos\varphi_i\cdot s_i = 0\,. \quad (3)$$

Здесь введены новые параметры $P_j, j = 0,1,...,6$, которые зависят от основных параметров механизма следующим образом:

$$\begin{aligned}&P_0 = 2kl\sin\rho - 2s_0 l\cos\rho + a^2 + d^2 + k^2 + l^2 + s_0^2 - b^2,\\&P_1 = 2s_0 a\sin\rho\sin\varphi_0 + 2ak\cos\rho\sin\varphi_0 - 2ad\cos\varphi_0,\\&P_2 = 2s_0 a\sin\rho\cos\varphi_0 + 2ak\cos\rho\cos\varphi_0 + 2ad\sin\varphi_0,\\&P_3 = -2l\cos\rho + 2s_0,\ P_4 = 1,\ P_5 = 2a\sin\gamma\sin\varphi_0,\ \ P_6 = 2a\sin\gamma\cos\varphi_0,\end{aligned} \quad (4)$$

Выражение Δq_i из (3) представляет собой не что иное как взвешенное отклонение реального положения механизма от заданного. Нетрудно посчитать, что число искомых параметров механизма $n = 8$: это длина кривошипа $AB = a$, длина шатуна $BC = b$, межосевое расстояние $OO' = h$ и аппликата $DK = m$, что ведет к $OO' + DK = d = h + m$, расстояние до оси вращения $AO = l$, угол скрещивания осей вращения $\angle AOD = \rho$, абсцисса точки C в подвижной системе координат $KC = -k$ и начало отсчета угла и перемещения, φ_0 и s_0. Как мы видим, число параметров P_j на два меньше числа искомых параметров механизма.

Запишем систему (3), выраженную через один какой-либо параметр, например P_4, для всех положений механизма:

$$P_0 + P_1\cos\varphi_i + P_2\sin\varphi_i + P_3 s_i + +P_5\cos\varphi_i s_i + P_6\sin\varphi_i s_i = -s_i^2,\ i = 1,2,\ldots,N\,. \quad (5)$$

Систему (5) можно записать в векторно-матричной форме:

$$A\cdot P = B\,.$$

Таким образом, получили систему из N уравнений для определения $n = 8$ искомых параметров механизма. Решение системы (5) можно записать в случае интерполяционного синтеза при $N = n - 2$, т. е. когда число положений совпадает с числом искомых параметров.

$$P = \left[P_0\,P_1\,P_2\,P_3\,P_5\,P_6\right]^T = A^{-1}B, \quad (6)$$

Здесь матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & s_1 & s_1\cos\varphi_1 & s_1\sin\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & s_2 & s_2\cos\varphi_2 & s_2\sin\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_6 & \sin\varphi_6 & s_6 & s_6\cos\varphi_6 & s_6\sin\varphi_6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$B=\begin{bmatrix} -s_1^2 & -s_2^2 & \cdots & -s_6^2 \end{bmatrix}^T$$

Решение системы (5) можно записать в случае квадратичного синтеза $N > n-2$, т. е. когда число положений механизма больше числа искомых параметров.

$$P=\left[P_0\,P_1\,P_2\,P_3\,P_5\,P_6\right]^T=(A^TA)^{-1}A^TB\,. \tag{8}$$

Здесь матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & s_1 & s_1\cos\varphi_1 & s_1\sin\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & s_2 & s_2\cos\varphi_2 & s_2\sin\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\varphi_N & \sin\varphi_N & s_N & s_N\cos\varphi_N & s_N\sin\varphi_N \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$B=\begin{bmatrix} -s_1^2 & -s_2^2 & \cdots & -s_N^2 \end{bmatrix}^T$$

Очевидно в формулах (6) и (8) параметры P_i имеют следующие значения согласно [5; 6]:

$$[P_0\,P_1\,P_2\,P_3\,P_5\,P_6]^T=\begin{cases} A^{-1}B, \text{ при } n-2=N, \\ (A^TA)^{-1}A^TB, \text{ при } n-2<N \end{cases} \tag{10}$$

Если число искомых параметров $n-2>N$, то часть параметров приходится задавать, например, из конструктивных соображений, либо учитывать дополнительные условия при синтезе механизма, такие как: ограничение на угол давления, минимизация массы механизма, вопросы уравновешивания и т. д. Подобные ограничения также можно использовать и при синтезе механизма когда $n-2\le N$, для этого нужно составить целевую функцию с ограничениями:

$$S=\sum_{i=1}^{N}[\Delta q_i^2(\vec{q},\varphi_i)+\sum_{k=1}^{M}\lambda_k G_k(\vec{q},\varphi_i)]\,. \tag{11}$$

Здесь $\vec{q}=\{a,b,l,k,d,\rho,\varphi_0,\mathrm{s}_0\}$ – вектор искомых параметров механизма,

$\lambda_k>0$ – весовые коэффициенты и

$G_k(\vec{q},\varphi_i)\ge 0$ – функциональные ограничения, число которых равно M.

Окончательно для решения задачи синтеза нужно найти связь между искомыми параметрами механизма, заданные вектором $\vec{q}$ и параметрами P_i.

Таким образом, на основании (4) можно записать следующую систему уравнений связей:

$$\tan\varphi_0 = \frac{P_5}{P_6},\ \sin\rho = \pm\frac{\sqrt{P_5^2+P_6^2}}{2a},\ d = \frac{P_2\sin\varphi_0 - P_1\cos\varphi_0}{2a},\ g = \frac{P_2\sin\varphi_0 + P_1\cos\varphi_0}{2a},$$
$$g = s_0\sin\rho + k\cos\rho,\ b = \sqrt{2kl\sin\rho - 2s_0 l\cos\rho + a^2 + d^2 + k^2 + l^2 + s_0^2} \quad (15)$$

Например, при $k = 0$ имеем некоторые упрощения:

$$b = \sqrt{-2s_0 l\cos\rho + a^2 + d^2 + l^2 + s_0^2},\ s_0 = \frac{g}{\sin\rho},\ l = \frac{2s_0 - P_3}{2\cos\rho}. \quad (16)$$

Как мы видим, только φ_0 и s_0 не зависят от параметра a. Если задать длину кривошипа $a = 1$, то можно определить все остальные параметры механизма. Длину кривошипа можно определить из наименьшего размера длины шатуна b, для этого найдем минимум b^2 из (16):

$$\frac{db^2}{da} = \frac{d}{da}(s_0P_3 + a^2 + d^2 + l^2 - s_0^2) = 2(a + dd' + ll') = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$dd' = -\frac{(P_2\sin\varphi_0 - P_1\cos\varphi_0)^2}{4a^3},\ ll' = -\frac{(2s_0 - P_3)^2(P_5^2 + P_6^2)}{16a^3\cos^4\rho}. \quad (18)$$

Определив по формулам (17) длину кривошипа a, затем по формулам (15) и (16) определяем все остальные параметры проектируемого механизма.

Угол давления в шарнире C ν_C можно определить по следующей формуле:

$$\cos\nu_C = \frac{b^2 + (s_i + s_0)^2 + 2ad\cos(\varphi_i + \varphi_0) - a^2 - l^2 - d^2}{2b(s_i + s_0)}. \quad (19)$$

Рассмотрим конкретный пример решения задачи синтеза пространственного передаточного механизма. В качестве тестовой функции будем использовать следующую искусственно созданную зависимость положения выходного звена от положения входного звена:

$$\mathrm{s}(\varphi) = s_{\max}\cdot\begin{cases}\dfrac{5\pi}{36}\left[1 - \cos\dfrac{9\varphi}{8}\right], \text{ при } 0 \le \varphi \le \dfrac{8\pi}{9}\\[2ex] \dfrac{5\pi}{36}\left[1 + \cos\dfrac{9\varphi - 8\pi}{10}\right], \text{ при } \dfrac{8\pi}{9} < \varphi \le 2\pi\end{cases} \quad (20)$$

График тестовой функции $s/s_{\max}$ и ее производной изображены на рисунке 2. Амплитуду $s_{\max}$ в этой функции при желании можно задавать, а также можно задать любое число N положений механизма.

Рассмотрим сначала аппроксимационную задачу синтеза. Пусть заданы, например, $N = 18$ значений углов поворота входного звена AB $\varphi_i = (i-1)\cdot 2\pi/18$, $i = 1,2\ldots,18$, и по формуле (20) определим соответствующие значения s_i, $i = 1,2,\ldots,18$ ($s_{\max} = 4$). На рисунке 3 показаны на графике эти точки символом «ромбик». В результате решения по формулам (16) находим искомые параметры проектируемого механизма ($k = m = 0$):

$a = 1.70797412960852$, s_0= -6.20675982498727, φ_0=1.403097486349, b =3.3939292783239, l= -2.3141331518501, d =0.832304906015571, γ = 0.572498538879132, g=-3.36241211.

На рисунке 4 показаны графики функции (3), т. е. зависимости $s = s(\varphi)$ для значений $0 \le \varphi \le 2\pi$, которые указывают на существование двух корней и существование механизма.

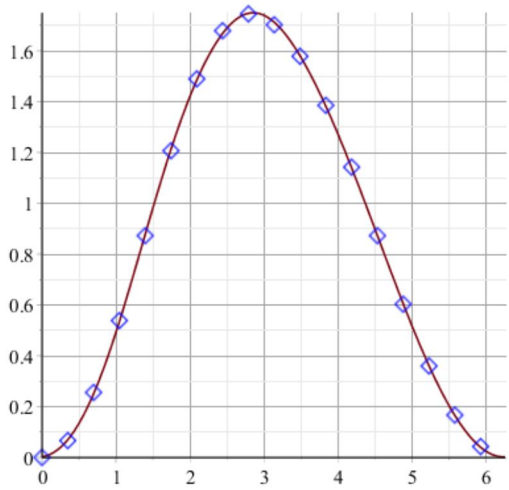

Рис. 3. График заданных точек и функция положений

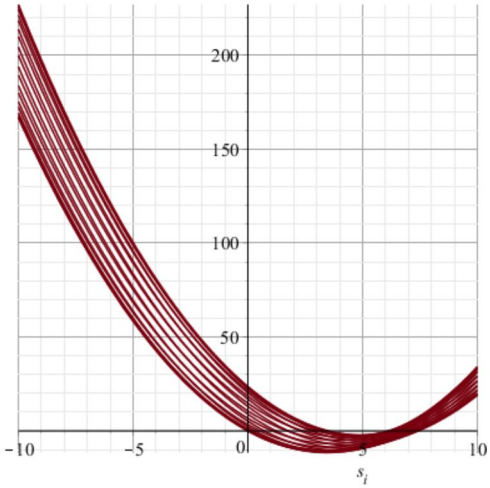

Рис. 4. Графики функции $s = s(\varphi)$

Как мы видим из рисунка 3, график функции положения спроектированного механизма проходит через заданные точки с некоторым квадратичным отклонением. График этих абсолютных отклонений от заданных значений изображен на следующем рисунке 5. Этими отклонениями можно управлять, если удачным способом выбрать опорные точки φ_i или при решении переопределенной системы (5) ввести соответствующие весовые функции.

Рис. 5. График абсолютных отклонений

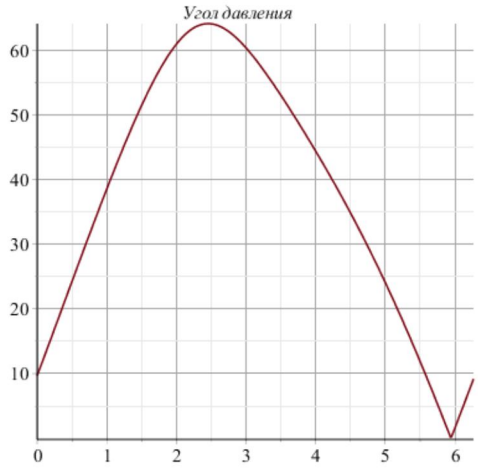

Рис. 6. График угла давления $\nu_C = \nu_C(\varphi)$

На рисунке 6 построен график угла давления $\nu_C = \nu_C(\varphi)$ пространственного механизма, позволяющий судить о качестве работы всего механизма.

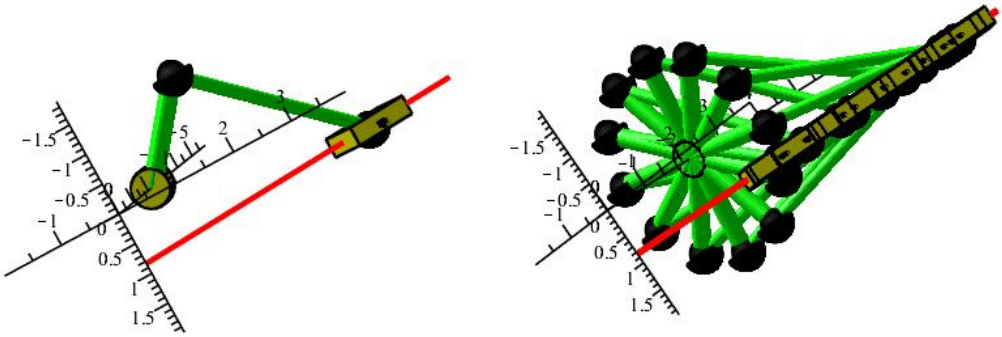

Рис. 7. Вид спроектированного механизма и картина его положений

На рисунке 7 изображен спроектированный механизм и его картина положений, что, несомненно, говорит о его работоспособности.

Рассмотрим аналогично интерполяционную задачу синтеза. Пусть заданы, например, $n-2=N=6$ значений углов поворота входного звена AB $\varphi_i=(i-1)\cdot 2\pi/6,\ i=1,2\ldots,6$, и по формуле (20) определим соответствующие значения $\psi_i,\ i=1,2,\ldots,6$ ($s_{\max}=4$). На рисунке 8 показаны на графике эти точки символом «ромбик». В результате решения по формулам (16) находим искомые параметры проектируемого механизма ($k=m=0$).

$a=2.26023413038000$, s_0= -8.39821119301956, φ_0=1.17835855266154, b =5.754558116367, l= -2.08044211895297, d =1.97040322321172, γ =0.489117281300814, g=-3.94587310159192.

Как мы видим из рисунка 8, график функции положения спроектированного механизма точно проходит через заданные точки.

На рисунке 9 показаны графики функции (3), т. е. зависимости $s=s(\varphi)$ для значений $0\le\varphi\le 2\pi$, которые указывают на существование двух корней, т.е. существование механизма во всех положениях.

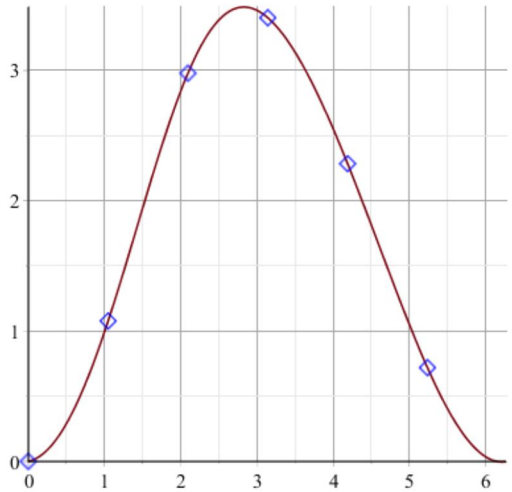

Рис. 8 График заданных точек и функция положений

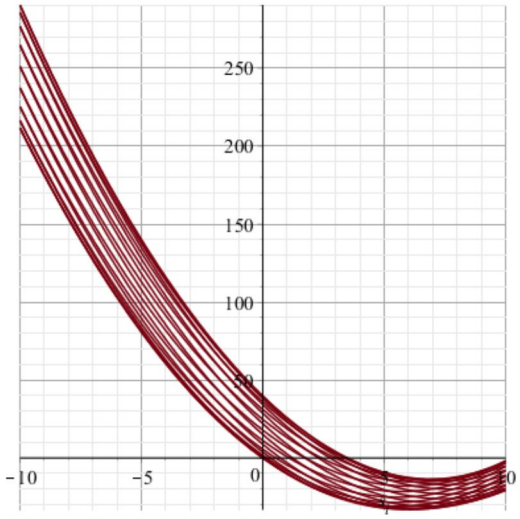

Рис. 9 Графики функции $s=s(\varphi)$

На рисунке 10 изображен спроектированный механизм и его картина положений, что, несомненно, говорит о его работоспособности.

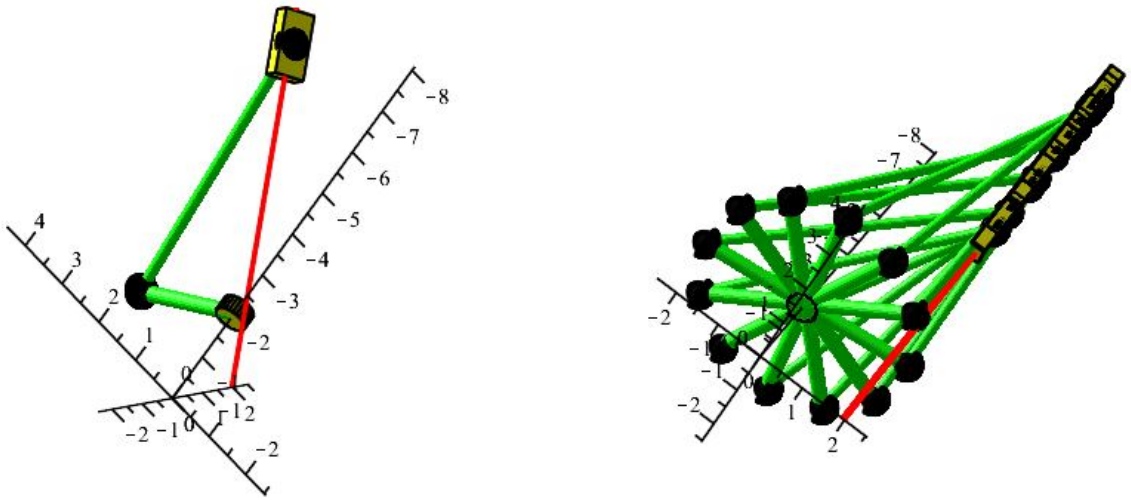

Рис. 10 Вид спроектированного механизма и картина его положений

Все выводы и расчеты проводились в системе компьютерной алгебры Maple. Для этого была создана специальная библиотека по отрисовке графических примитивов и вычисления параметров синтеза [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пейсах Э.Е., Нестеров В.А. Система проектирования плоских рычажных механизмов / под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1988. – 232 с.

2. Механика машин: учеб. пособие для втузов / И. И. Вульфсон [и др.] ; под ред. Г. А. Смирнова. – М.: Высшая школа, 1996. – 511 с.

3. Дракунов А.Ю., Дракунов Ю.М. Метод определения круговых и сферических точек при кинематическом синтезе механизмов // The scientific method. Sarszava-Poland. – 2018. – № 23. – Vol. 1. – С. 28–35.

4. Дракунов А.Ю., Дракунов Ю.М. Синтез передаточного механизма 4в по полному числу параметров // Сборник статей межд. иссл. организации «Cognitio» по материалам XXXVII междунар. научю-практ. конф. «Актуальные проблемы науки XXI века». – М., 2018. – С. 18–23.

5. Дракунов А.Ю., Дракунов Ю.М. Синтез дезаксиального кривошипно-ползунного механизма по полному числу параметров // Norwegian Journal of development of the International Science. – Oslo, 2018. – № 23. – Vol. 2. – С. 52–56.

6. Дракунов А.Ю., Дракунов Ю.М. Проектирование и исследование нового механизма пресса // Содружество: российско-китайский журнал. – 2018. – № 29. – С. 10–18.

7. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – М.: ДМК Пресс, 2011 – 800 с.

Drakunov A.Yu.
Associate researcher of the project

Drakunov Yu.M.
Project Manager, Doctor of Technical Sciences

Institute of Mechanics and Engineering,
Kazakhstan, Almaty

SYNTHESIS OF SPATIAL TRANSMISSION MECHANISM TYPE RSST

The paper discusses the general method of synthesis of simple spatial lever mechanisms. An exact interpolation synthesis based on the total number of parameters and an approximate quadratic method for a set of specified positions of the mechanism are proposed. The problem is solved using vector and matrix calculus. The solution of specific applied problems is considered. The entire synthesis process is automated using SKA Maple.

Key words: *mechanism, synthesis, kinematic analysis, system of equations, assembly of the mechanism, polynomial roots, crank, pressure angle, matrix, vector, desired parameters.*